УДК 517.928

В.И. УСКОВ

V.I. USKOV

**Решение сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка в подпространствах**

**Solution of singularly perturbed second-order differential equation in subspaces**

Аннотация. Рассматривается задача Коши дифференциальное уравнение второго порядка с малым параметром при старшей производной в банаховом пространстве. В правой части перед искомой функцией находится вырожденный оператор. Этот оператор обладает свойством иметь число 0 нормальным собственным числом. Рассматривается случай одномерного ядра этого оператора. Найдено решение задачи в подпространствах.

Ключевые слова: задача Коши, дифференциальное уравнение второго порядка, малый параметр, 0-нормальное собственное число, банахово пространство, расщепление.

*Abstract. We consider the Cauchy problem of a second-order differential equation with a small parameter multiplying highest derivative in a Banach space. In the right-hand side, before the unknown function, there is a degenerate operator. This operator has the property of having the number 0 as a normal eigenvalue. The case of the one-dimensional kernel of this operator is considered. The solution of the problem in subspaces is obtained.*

*Keywords: Cauchy problem, second order differential equation, small parameter, 0-normal eigenvalue, Banach space, splitting.*

Рассматривается задача:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |
|  | (2) |

где – замкнутый линейный оператор, обладающий свойством иметь число 0 нормальным собственным числом, (далее, 0-н.с.ч.), , – заданная достаточно гладкая функция со значениями в , – малый параметр, .

Под *решением* задачи (1), (2), подразумевается функция , дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая (1), (2) при каждом .

Уравнения с малым параметром при старшей производной встречаются в задачах математической физики, связанных с потенциальными барьерами квантовой физики, в теории дифракции, в теории тонких упругих оболочек, в задачах на собственные функции типа волн Релея [1]; ими описывается движение тела малой массы в среде с сопротивлением под действием силы и т.д.

Приведем необходимые сведения.

**Определение 1** [2]**.** *Линейный оператор , действующий в банаховом пространстве , обладает свойством 0-н.с.ч., если имеет место разложение в прямую сумму*

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

*где – корневое подпространство, а – инвариантное подпространство и такое, что сужение оператора на имеет ограниченный обратный .*

**Определение 2** [3]**.** *Жордановой цепочкой элементов, отвечающих нулевому собственному значению (далее просто жордановой цепочкой) назовем последовательность удовлетворяющую равенствам*

,

**Определение 3** [4]. *Ограниченная функция называется функцией погранслоя вблизи , если при имеет место следующее поведение функции: на , , и на .*

Рассматривается случай: , . Пусть – проекторы на , соответственно, отвечающие разложению (3).

Разложив функции , и начальные значения , , , из в сумму элементов из пространств , и применив свойство , получим начальную задачу в *N* (далее, *N*-задача) и задачу в *M* (далее, *M*-задача).

Рассмотрим сначала *M*-задачу. Пусть выполнено условие.

**Условие C.** *Задача Коши для уравнения равномерно корректна.*

Пусть – полугруппа, порожденная оператором . Имеет место следующий результат.

**Теорема 1.** *Пусть выполнено условие C. Пусть функция*  *непрерывно дифференцируема на . Тогда решение M-задачи существует, единственно*.

Получена аналитическая формула решения. Наложим следующее условие:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Тогда выполнено следующее утверждение.

**Теорема 2.** *При выполнении оценки* (4) *имеет место следующее представление решения M*-*задачи* *при* :

*где – функция погранслоя вблизи , а – равномерно сходящаяся к нулю функция.*

Теперь рассмотрим *N*-задачу.

Корневое подпространство – это линейная оболочка, натянутая на элементы

жордановой цепочки. Разложив элементы по базису , подставив эти разложения в уравнение и приравняв коэффициенты при элементах базиса, получим систему рекуррентных дифференциальных уравнений для нахождения коэффициентов разложения .

Начальные значения для этих уравнений находятся так же.

Получены следующие результаты.

**Теорема 3.** *Пусть функция непрерывна* на . *Тогда решение N-задачи существует, единственно*.

Решив последовательно задачи итерационного процесса, получим аналитическое выражение для коэффициентов разложения решения . Кроме того, из этого следует утверждение.

**Теорема 4.** *Порядок полюса решения N-задачи равен* .

Приводится иллюстрирующий пример с конкретным оператором .

Полученные результаты могут использоваться при построении асимптотического разложения решения по степеням малого параметра.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. – Успехи математических наук. – 1957. – Т. 12, вып. 5 (77). – С. 3-122.

2. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука, 1965. – 448 с.

3. Функциональный анализ. Под общей ред. С.Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 545 с.

4. Zubova S.P. The role of perturbations in the Cauchy problem for equations with a Fredholm operator multiplying the derivative // Doklady Mathematics, 2014, vol. 89, pp. 72-75.